Développement
Les théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus

Nathan Fournié

Gourdon, *Analyse*.
Daniel Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*.

Théorème: Théorème de Baire

Soit E un espace métrique complet. Les deux assertions suivantes sont vraies :
1) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouvert denses de E, alors :

$$U := \bigcap_{n\in N} U_n$$

est encore dense dans E.
2) Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide de E, alors :

$$F := \bigcup_{n\in N} F_n$$

est encore d'intérieur vide.

Démonstration

1) Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une famille d'ouverts denses de l'espace métrique complet (E, dist).
Pour montrer que U est dense dans E, il nous suffit de montrer que tout ouvert non vide de E intersecte U.
Pour cela, soit O un ouvert de E et prenons un $x_0 \in E$ et $0 < r_0 < 1$ tels que la boule ouverte $B(x_0, r_0) \subset O$, par densité de U_1, on peut trouver $x_1 \in U_1 \cap B(x_0, r_0)$. On peut même trouver un $0 < r_1 < \frac{1}{2}$ tel que la boule fermée $\overline{B}(x_1, r_1) \subset U_1 \cap B(x_0, r_0) \subset U_1 \cap U_2$.
On répète ce processus et on construit ainsi une suite de $x_n \in U_n$ et de $0 < r_{n+1} \leqslant \frac{1}{2^n}$ vérifiant :

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n) \subset \left(\bigcap_{n=1}^{n+1} U_n\right) \cap O \qquad (\dagger)$$

Maintenant, on voit que pour $N \in \mathbb{N}$ et $p, q > N$ on a :

$$\mathrm{dist}(x_p, x_q) \leqslant \mathrm{dist}(x_p, x_N) + \mathrm{dist}(x_q, x_N) \leqslant \frac{2}{2^N}.$$

Ce qui montre que la suite (x_n) est de Cauchy, donc converge dans E par complétude.
Notons x sa limite, comme pour tout $n > N$ on a :

$$x_n \in \overline{B}(x_N, r_N)$$

La limite x appartient à $\overline{B}(x_N, r_N)$, puis, avec (†) on a que $x \in U \cap O$, ce qui termine la preuve.

2) Soit (F_n) une suite de fermés d'intérieur vide de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$O_n = E \setminus F_n,$$

de sorte que les O_n constituent une famille d'ouvert. De plus, pour tout n on a :

$$\overline{O_n} = \overline{E \setminus F_n} = E \setminus \mathrm{int}(F_n) = E.$$

Donc (O_n) est une suite d'ouverts denses de E, on applique 1) et on trouve que :

$$O := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

est un ouvert dense dans E, donc $\overline{(O)} = E$. Or,

$$\overline{O} = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E \setminus F_n} = \overline{E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n} = E \setminus \mathrm{int}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n)$$

Donc, $\mathrm{int}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \varnothing$.

Théorème: Théorème de Banach-Steinhaus

Soit E et F deux espaces de Banach. Soit (T_i) une famille d'application linéaire continues de E vers F. Si les T_i vérifient, pour tout $x \in E$:

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < \infty.$$

Alors :

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty.$$

Démonstration

Supposons que pour tout $x \in E$ et pour tout $i \in I$ on ait :

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < \infty.$$

Posons alors l'ensemble :

$$\Delta_n := \{x \in E \ ; \ \forall \ i \in I : \|T_i(x)\| > n\} = \bigcup_{i \in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| > n\}.$$

Les T_i sont continue[a], et on a : $\Delta_n = \bigcup_{i \in I} T_i^{-1}(]n; +\infty[)$, donc Δ_n est un ouvert. Enfin, comme $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < \infty$. on a :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \varnothing$$

qui n'est alors pas dense dans E. Par la contraposée du théorème de Baire, il existe un Δ_n qui ne soit pas dense dans E. On peut alors trouver $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que, pour un certain n :

$$B(x_0, r_0) \cap \Delta_n = \varnothing.$$

Enfin, pour tout $x \in B(0, r_0)$ on a :

$$\|T_i(x)\|_F = \|T_i(x + x_0) - T_i(x_0)\|_F \leqslant \|T_i(x + x_0)\|_F + \|T_i(x_0)\|_F \leqslant 2k$$

Pour rappel, la norme opérateur est définie comme :

$$\|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T_i(x)\|_F .$$

Donc, pour x de norme 1 on a :

$$\|T(x)\|_F = \frac{2}{r_0} \left\| T_i(\frac{r_0}{2} x) \right\|_F \leqslant \frac{4k}{r}.$$

Et donc, $\|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leqslant \infty$, ceci étant vrai pour tout i, on a bien :

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < \infty.$$

a. et la norme !

Dernière compilation le 18 août 2025.